# Тема 10. Системы линейных уравнений

Пусть дана система **m** линейных уравнений с **n** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Эту систему можно записать в матричной форме: AX = B,

где $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

**Решением системы** называется всякая матрица-столбец **X**, обращающее матричное уравнение **AX = B** в тождество. Система называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если решений нет. Совместная система называется определенной, если решение единственное, и неопределенной, если она имеет бесконечно много решений. Система называется однородной, если ее свободные коэффициенты равны нулю.

Всякая квадратичная невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу. Найдя произведение **A·X**, замечаем, что систему уравнений (1) можно записать в виде **A·X = B**. Чтобы решить систему **A·X = B** матричным методом, умножим обе части этого равенства слева на $\mathbf{A^{-1}}$ и получим $\mathbf{A^{-1} \cdot A{\cdot}X = A^{-1} \cdot B}$, но $\mathbf{A^{-1} \cdot A = E}$, **E·X =X,** значит

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}.$$

***Правило Крамера.*** Если **m = n** и $\mathbf{\Delta = \det A \neq 0}$, то решение системы можно получить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{\Delta_i}$ **(i = 1,2,…,n)** – определитель, получаемый из определителя **Δ** заменой **i-го** столбца на столбец свободных членов.

Две системы называются равносильными, если каждое решение одной является решением другой, т.е. у них множества решений совпадают. Следующие элементарные преобразования переводят систему в равносильную:

а) перемена местами любых двух уравнений;

б) умножение обеих частей любого уравнения на неравное нулю число;

в) прибавление к обеим частям любого уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на произвольное число.

Данные преобразования проще выполнять над матрицей, составленной из коэффициентов при неизвестных переменных и свободных членов. Такая матрица называется расширенной матрицей системы:

$$(B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3)$$

***Метод Гаусса.*** Метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса, применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершаются не над уравнениями, а над расширенной матрицей. Это метод приведения расширенной матрицы системы к треугольному виду. Рассмотрим данный метод на примере.

**Пример 7.** Решить систему: а) средствами матричного исчисления; б) методом Гаусса; в) с помощью формул Крамера.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

*Решение:*

1. Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$

Разложим по элементам 1-й строки:

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot(5\cdot(-2) - (-3)\cdot 6) + 3\cdot(2\cdot(-2) - (-3)\cdot 5) +$$

$$+ 2\cdot(2\cdot 6 - 5\cdot 5) = 39,$$

так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Пусть А-матрица коэффициентов при неизвестных, Х-матрица – столбец неизвестных и В-матрица – столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

тогда $X = A^{-1}\cdot B.$

Для нахождения обратной матрицы $A^{-1}$ вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -39,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8\cdot 9 + 6\cdot 4 - 1\cdot 18 \\ -11\cdot 9 - 18\cdot 4 + 16\cdot 18 \\ -13\cdot 9 - 39\cdot 4 + 26\cdot 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Итак, x = 2, y = 3, z = 5.

2. Составляем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (4) & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array}\right) \sim$$

Умножим 1-ую строку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{5}{4}\right)$ и прибавим соответственно ко второй и третьей строке:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & (13) & -8 & -1 \\ 0 & \frac{39}{4} & -\frac{18}{4} & \frac{27}{4} \end{array}\right) \sim$$

Умножим теперь вторую строку на $\frac{3}{13}$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)$ и прибавим соответственно к 1-й и третьей строке:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{114}{13} \\ 0 & 13 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{4} & \frac{30}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{114}{13} \\ 0 & 13 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & (1) & 5 \end{array}\right) \sim$$

Умножим третью строку на $\left(-\frac{2}{13}\right)$ и 8, прибавим соответственно к 1-й и 2-й:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & \frac{104}{13} \\ 0 & 13 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{array}$$

3. Если $\Delta \neq 0$, то система $AX = B$ имеет единственное решение, которое можно найти по формуле (5).

Итак, $\Delta = 39$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 18 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} = 78;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 195.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{117}{39} = 3; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{195}{39} = 5.$

Ответ: x = 2, y = 3, z = 5.

**Вопросы для самопроверки.**

1. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений? Какие системы называются совместными, а какие - несовместными?
2. При каком условии система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение?

3. При каком условии однородная система **n** линейных уравнений с **n** неизвестными имеет не нулевое решение?
4. Что называется рангом системы линейных уравнений?